

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України



Мар'ян Сявавко

Математика прихованих можливостей

Навчальний посібник

Острог – 2011

УДК 51
ББК 22.1
С 99

*Гриф надано Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України
(Лист № 1/11-1678 від 02.03.2011 р.)*

Рецензенти:

Вітлінський В. В. – доктор економічних наук, професор, завідувач кафедри економіко-математичного моделювання ДВНЗ «Київський національний економічний університет імені В. Гетьмана»;

Грицюк П. М. – доктор економічних наук, доцент кафедри прикладної математики Національного університету водного господарства та природокористування;

Новоселецький О. М. – кандидат економічних наук, доцент кафедри економіко-математичного моделювання та інформаційних технологій в економіці Національного університету «Острозька академія».

С 99

Сявавко Мар'ян.

Математика прихованих можливостей: навчальний посібник /
М. С. Сявавко. – Острог : Видавництво Національного університету
«Острозька академія», 2011. – 396 с.

Розглянуто основні методи роботи із неповною інформацією, зі знаннями, насамперед нечіткими; аналізуються нові підходи системного дослідження важливих класів моделей інтелектуальних систем; поданий розв'язок складних важко-структурованих і формалізованих задач зі сфери бізнесу, управління, планування, діагностики, прийняття рішень тощо.

Посібник призначений для студентів вищих навчальних закладів, які проходять підготовку за спеціальностями «Математичні методи, моделі та інформаційні технології в економіці», «Економічна кібернетика», «Комп'ютерні науки» та «Прикладна математика». Метою посібника є ознайомлення студентів з основами нового підходу вивчення теорії інтелектуальних систем.

ISBN 978-966-2254-42-6

© Сявавко Мар'ян
© Видавництво Національного університету
«Острозька академія», 2011.

... Ще б трохи прожити, та сонце зайшло

Від редактора

Цю книгу доктор фізико – математичних наук, професор Мар'ян Сявавко, завідувач кафедри математичного моделювання та інформаційних технологій Національного університету «Острозька академія», завідувач кафедри обчислювальної математики і моделювання Львівського державного інституту новітніх технологій та управління ім. В. Чорновола приурочував до свого 70 – ліття. Вона є підсумком його наукових пошуків і здобутків останніх років. Нажаль, тяжка, підступна хвороба раптово обірвала його життя.

Перед публікуванням книга вимагала ще уважної вчитки, усунення деяких неточностей, вдумливого редагування. Моїм моральним обов'язком і як дочки, і як поінформованого завдяки йому в даних питаннях науковця, було взяти цю відповідальність на себе. До того я виступала як співавтор Мар'яна Степановича Сявавка у написанні двох монографій: «Математичне моделювання за умов невизначеності» (Львів, 2000 р.) та «Математичні аспекти відновлення інформації» (Львів, 2008 р.).

Впевнена, що цей посібник є актуальний за змістом і суттю. Свіжий підхід до проблем обробки нечітко заданої інформації, некоректної постановки задач та методів їх регуляризації, необхідності «м'якого» моделювання та застосування нечіткої логіки дасть поштовх до подальших роздумів та напрацювань у цих наукових напрямках.

Ольга РИБИЦЬКА

ЗМІСТ

Від редактора	3
ЗМІСТ	4
Від автора	9
Тема 1. Постнекласичний період розвитку науки і місце математики в ньому	11
<i>Література</i>	<i>17</i>
Тема 2. Вступ у нечіткі системи	18
2.1. Інтелект як високоорганізована кібернетична система	21
2.1.1. Формалізація понять алгоритмічності та декларативності	23
2.1.2. Означення інтелектуальної системи	29
2.2. Знання як інформаційна основа інтелектуальних систем	30
2.2.1. Зіставлення даних зі знаннями	30
2.2.2. Мікро- та макрознання, макродумки	34
2.3. Людино-машинні системи	35
2.4. Поняття про методи та моделі нечіткої економічної системи	35
<i>Література</i>	<i>37</i>
Тема 3. Необхідність використання методу "розмивання" параметрів при моделюванні складних систем	38
3.1. Проблема невизначеності при прийнятті рішень	43
3.2. Місце та роль моделювання з точки зору системного аналізу	46
3.3. Переваги <i>Fuzzy</i> -технологій над класичними методами розв'язання аналітичних задач за умов невизначеності	48
<i>Література</i>	<i>51</i>
Тема 4. Поняття нечітких множин та відношень	53
4.1. Нечітка множина: означення та її характеристики	55
4.2. Операції над нечіткими множинами	61
4.3. Нечіткі числа та інтервали	62
4.4. Нечіткі відношення	65
<i>Запитання та завдання для самоконтролю</i>	<i>67</i>
<i>Література</i>	<i>72</i>
Тема 5. Методи побудови функції належності	74
5.1. Основні групи методів	76
5.2. Прямі методи для одного експерта	79
5.3. Аналітичні моделі	81
5.4. Аналітико-лінгвістична апроксимація	82
5.5. Експертні методи побудови	84
5.6. Метод попарних порівнянь	87
5.7. Скісні методи для одного експерта	91
5.8. Прямі та скісні методи для групи експертів	93
5.9. Принцип термометра в оцінці якісних змінних	94
5.10. Методи побудови терм-множин	95
<i>Література</i>	<i>97</i>

Тема 6. Причини виникнення, засадничі поняття і приклади застосувань ідемпотентної математики	99
6.1. Алгебраїчна структура.....	103
6.1.1. Означення та властивості групи	106
6.1.2. Кільце, поле	108
6.1.3. Поняття півгрупи та півкільця	109
6.2. Засадничі поняття ідемпотентної математики.....	110
6.2.1. Ідемпотентні півкільця	111
6.2.2. Алгебра ідемпотентної математики	113
6.2.3. Ідемпотентний принцип суперпозиції	115
6.3. Приклади застосувань	116
6.3.1. Апарат ланцюгових дробів та його різновиди	116
6.3.2. Нечіткі реляційні рівняння	120
6.4. Розв'язування нечітких рівнянь та систем із $L - R$ нечіткими числами ...	122
<i>Література</i>	125
Тема 7. Модель розрізнювання	128
7.1. Формування асортиментного ядра гуртового підприємства	129
7.2. Розрізнювання аграрних зон	133
7.3. Туристична індустрія	138
<i>Запитання та завдання для самоконтролю</i>	139
<i>Література</i>	139
Тема 8. Нечіткі експертні системи	140
8.1. Перше покоління експертних систем	142
8.2. Друге покоління експертних систем	143
8.3. Базові поняття та положення теорії нечіткої логіки	145
8.4. Створення бази нечітких знань	146
8.5. Побудова системи нечітких логічних рівнянь	149
8.6. Алгоритм апроксимації	149
8.7. Об'єкти з неперервним виходом	151
8.8. Застосування композиційного правила виведення	152
8.9. Узагальнене дерево логічного виведення	154
8.10. Приклади систем « <i>Fuzzy Expert</i> »	157
8.10.1. Діагностика ішемічної хвороби серця	157
8.10.2. Тонке налаштування бази знань	163
<i>Запитання та завдання для самоконтролю</i>	166
<i>Література</i>	168
Тема 9. Елементарна теорія нечітких мір та інтегралів	169
9.1. Розподіл впевненості	172
9.2. Означення та класифікація нечітких мір	173
9.3. Очікувані значення, обчислені через невимірні ваги.....	176
9.3.1. Аналітичний ієрархічний процес	178
9.4. Математичні конструкції побудови нечітких мір для скінченновимірного випадку	180
9.5. Неперервний випадок	182

9.6. Модальні логіки з основами теорії можливості	184
9.6.1. Логіка Лукасевича	185
9.6.2. Логіка знання	185
9.6.3. Чотиризначна логіка позитивного	186
9.7. Нечіткі інтеграли: означення, властивості, обчислення	187
9.8. Застосування нечітких мір та інтегралів до розв'язання слабо структурованих задач економіки	192
9.8.1. Нечіткий інтеграл Сугено для нечіткого числа з трикутною функцією належності	195
9.8.2. Приклад на основі рядів динаміки	196
9.8.3. Екстраполяція на засадах індексу сезонності	197
9.8.4. Нечітка статистика в задачі оцінювання кредитоздатності інноваційних проектів	198
9.9. М'який метод оцінювання знань та структури творчих можливостей	204
9.9.1. Нечітко-інтервальний показник якості знання	206
9.9.1.1. Аналіз сформованості творчої особистості	206
9.9.1.2. Оцінювання якості дипломного проекту	207
<i>Література</i>	209
Тема 10. Основні моделі та методи обробки нечіткої інформації.....	211
10.1. Лінгвістичні критерії та відношення переваги	213
10.2. Прийняття рішень на основі лінгвістичних лотерей	219
10.2.1. Поняття детермінованого еквівалента лотереї	220
10.2.2. Лінгвістичні лотереї та їх властивості	222
10.2.3. Лінгвістичні лотереї з чіткими виходами	228
10.2.4. Подання складеної лінгвістичної лотереї	230
10.3. Означення нечіткої сподіваної корисності лінгвістичної лотереї	232
10.4. Методи побудови нечітких функцій корисності	234
10.4.1. Метод безпосередньої оцінки корисності	234
10.4.2. Метод оцінки лінгвістичних відношень	235
10.4.3. Комбінований метод та аналіз вибору	235
10.4.4. Випадок багатовимірних результатів	237
10.5. Перевірка узгодженості нечіткої вхідної інформації	242
10.5.1. Функція корисності	242
10.5.2. Розподіл імовірності	243
10.5.3. Представлення нечіткої вхідної інформації	245
10.5.4. Види нечітких описів	245
10.5.5. Нечіткий опис як розподіл можливостей	246
<i>Література</i>	247
Тема 11. Нечітка ентропія (показники розмитості нечітких множин)	249
11.1. Класичний випадок	251
11.1.1. Властивості ентропії	253
11.1.2. Ентропія неперервної випадкової величини	255
11.2. Поняття нечіткої ентропії	258

11.2.1. Асимптотичний підхід до визначення показника розмитості нечіткої множини	258
11.2.2. Метричний підхід до визначення показника розмитості нечіткої множини	260
11.3. Ентропія неперервних нечітких інтервалів	261
11.4. Міра нечіткої поведінки соціальної системи як міра кількості ентропії	263
11.4.1. Кількість ентропії соціальної системи за Шенноном	265
11.4.2. Нечітка ентропія соціальної системи	267
<i>Література</i>	268
Тема 12. Моделі нечіткого математичного програмування в підтримці прийняття рішень	269
12.1. Різноманіття систем прийняття рішень	271
12.2. Задачі нечіткого математичного програмування	276
12.2.1. Гнучке планування	282
12.2.2. Нечітка лінійна задача прийняття рішень	284
12.2.3. Лінійні оптимізуючі моделі з гнучкими граничними обмеженнями	288
12.2.4. Загальний випадок оптимізації моделі нечіткого програмування ...	292
12.2.5. Задача землекористування	295
12.3. Недоміновані альтернативи в задачі нечіткого математичного програмування	307
12.4. Багатокритеріальні задачі лінійного програмування з нечіткими параметрами	315
12.4.1. Задача лінійного програмування з інтервально-заданими нечіткими параметрами цільових функцій	315
12.4.2. Задача лінійного програмування з нечіткими параметрами критеріїв з відомими функціями належності	316
12.4.3. Задача лінійного програмування з нечіткими параметрами в цільовій функції	317
<i>Запитання та завдання для самоконтролю</i>	320
<i>Література</i>	327
Тема 13. Регуляризація некоректно поставлених задач	330
13.1. Основи теорії ультраоператорів	332
13.1.1. Решітки понять	334
13.1.2. Основні види носіїв елементарної інформації	336
13.1.3. Означення ультраоператора	338
13.2. Тіхоновські оператори	340
13.3. Засадничі положення теорії регуляризації	345
13.3.1. Методи побудови регуляризаційних алгоритмів для лінійних задач в гільбертових просторах	346
13.4. Погано обумовлені системи лінійних алгебраїчних рівнянь	348
13.4.1. Обчислювальні методи	350
13.4.1.1. Метод Келі – Гамільтона	350
13.4.1.2. Метод скінченних ланцюгових дробів	353

13.4.1.3. Метод апроксимації Паде	356
13.4.2. Випадок неточності вхідної інформації	360
13.5. Мероморфна регуляризація інтегральних рівнянь першого роду	366
13.6. Псевдообернені матриці в задачах лінійної регресії.....	370
13.7. Регуляризуючі алгоритми задачі лінійного програмування.....	372
<i>Література</i>	374
Тема 14. Засади "м'якого" моделювання.....	377
14.1. М'які обчислення та нечітка логіка.....	379
14.2. Пом'ягшення динамічних моделей	381
14.3. Лінійна інтервальна регресійна модель	385
14.3.1. Вступ в інтервальні обчислення	385
14.3.2. Ідемпотентна інтервальна лінійна алгебра	389
14.3.3. Зведення до задачі лінійного програмування	391
<i>Література</i>	394

Від автора

У міфології цифра «нуль» означає простір, безконечність. Вона символізує неподільний світ, як Космічне яйце, що поєднує в собі два начала: чоловіче й жіноче, вогонь і воду. Завдяки їх паруванню відбувається зв'язок між світами (Дж. Купер, Енциклопедия символів, с. 311-372).

У математиці нуль та порожня множина лежать в основі формального означення натуральних чисел, множина яких $N = \{0, 1, 2, \dots\}$, на відміну від усталеного представлення, включає число 0. З цього числа, власне, і починається означення натурального числа. Вважатимемо, що дві множини рівносильні або еквівалентні, якщо між ними можна встановити взаємнооднозначну відповідність. Остання виражається через рівність їх кардинальних чисел або потужностей. Кардинальне число 0 є потужністю порожньої множини $\emptyset$, кардинальне число 1 – це потужність множини $\{\emptyset\}$, $2 = |\{\emptyset, \{\emptyset\}\}|$, де символ $|\cdot|$ означає потужність множини.

Таким чином, найпростішою серед підмножин довільної множини є пуста множина, яку можна охарактеризувати як 0-елемент. Вона відіграє базову роль в багатьох питаннях математики та її застосувань. Це особливо підтверджується дослідженнями в царині неklasичної та постнеklasичної математики.

При вивченні теорії множин на всіх рівнях природознавчої, технічної чи гуманітарної освіти основна увага приділяється операціям над множинами – алгебрі множин. На таких засадах розв'язання будь-якої задачі, в тому числі і проблеми штучного інтелекту, вимагає задання універсальної (базової шкали) множини. Тут операції виконуються над її частинами або підмножинами, включаючи невластні – саму множину і пусту множину, тобто над елементами її булеана – множини всіх її підмножин. Надалі булеан множини A позначатимемо символом 2^A . За аналогією для довільної множини можна створювати кратні булеани множин. Отже, кратні одноелементні множини мають в кожному кратному булеані мінімальну, після пустої множини, потужність; тоді як кожний кратний булеан є множиною максимальної потужності в наступному кратному булеані.

Для того, щоб подібно до цих чисел, записати і число 0 як степінь числа 2, можна використати символ « $-\infty$ », якщо покласти $2^{(-\infty)} = 0$, тобто $-\infty = \log_2 0$. Таке приєднання до множини дійсних чисел, в контексті ідемпотентної математики, приводить до ідемпотентного півполя $R_{\max}$.

Розглянемо взаємозв'язок нечітких множин та чисел із другим булеаном. Прикладне значення кратних булеанів у задачах штучного інтелекту пов'язане з тим, що якщо звичайна – чітка – множина є елементом його першого булеана, то як показано Сесілвою (Seselwa, B. *Completion of ordered structures by cuts of fuzzy sets: an overview* / B. Seselja. A. Terapcevic // *Fuzzy Sets and Systems*. – 2003. –

№.136. – Р. 1-19), нечітка підмножина визначається елементами другого булеана. Відомо, що перший булеан пов'язаний з операціями ідемпотентних півкільць. У той же час асимптотику нечіткої алгебри можна інтерпретувати як MV -алгебру, котра дещо відрізняється від булевої алгебри (і таку, що до неї входить). MV -алгебра запропонована за 7 років до виникнення теорії нечітких множин. Вона, поряд з операціями Буля, використовує спеціальні операції «додавання» і «множення», які для випадку ідемпотентності останніх перетворюють MV -алгебру в алгебру Буля. MV -алгебра є більш загальною алгебраїчною структурою, ніж алгебра Буля.

Низка задач штучного інтелекту зводиться до розв'язання реляційних рівнянь – мультимножинних або нечітких. Тут можливим є чисто алгебраїчний підхід. Він зводиться до задачі дослідження та розв'язку матричних рівнянь над півкільцями. Слід зауважити, що сукупність матриць над півкільцями є частковим півкільцем. Поняття узагальненої оберненої матриці дозволяє до кінця провести дослідження рівняння на сумісність і за певних умов одержати загальний розв'язок.

Нагадаємо, що MV -алгебра дозволяє провести аксіоматичний опис алгебри мультимножин, наділених необхідними операціями. У цьому випадку мультимножина або комплект, на відміну від звичайної множини, може містити кратні, що повторюються або збігаються, елементи, декілька примірників одного і того ж елемента. Якщо звичайна множина повністю описується своєю характеристичною функцією, що задана на цій множині і набуває значення $\{0,1\}$, а нечітка множина – функцією належності, що набуває значень в множині $[0,1]$, то мультимножину описують функцією екземплярності, що задана на цій мультимножині і набуває значень в множині $N \setminus \{0\}$.

На теперішній час ідемпотента теорія досягнула значного розвитку. Вона включає, зокрема, нову теорію інтегрування, нову лінійну алгебру, спектральну теорію і функціональний аналіз. Її застосування охоплюють різноманітні задачі оптимізації, такі як багатокритеріальна задача і нечітке прийняття рішень тощо.

У роботі (із поданням великої кількості прикладів та задач) вивчається теорія нечітких множин, будуються основні моделі та методи обробки нечіткої інформації, вивчаються показники розмитості нечітких множин (нечітка ентропія), запропоновано новий підхід до регуляризації некоректно поставленої задачі (мероморфна регуляризація). На наш погляд, до задач ідемпотентної математики належать і задачі аналітичної теорії ланцюгових дробів: звичайного, гіллястого, континуального.

На нашу думку, цей навчальний посібник буде корисний не тільки студентам, магістрам і аспірантам, які навчаються за спеціальністю «Економічна кібернетика», «Комп'ютерні науки», «Прикладна математика», а й широкому колу фахівців у різноманітних сферах діяльності, а особливо тим, кого цікавить, перш за все, теорія інтелектуальних систем.