

Міністерство освіти і науки України
Національний університет “Острозька академія”

Я. А. Пасічник

Математика для економістів

Затверджено
Міністерством освіти і науки України
як підручник для студентів вищих навчальних закладів,
які навчаються за освітньо-професійною програмою бакалавра
галузі знань “Економіка і підприємництво”

Острог, 2010

УДК 51:33
ББК 21.1
П 19

Гриф надано Міністерством освіти і науки України
(Лист № 1/11- 6200 від 9 липня 2010 р.)

Рецензенти:

Джунь Й. В. – доктор фізико-математичних наук, професор Міжнародного економіко-гуманітарного університету ім. акад. Ст. Дем'янчука (МЕГУ),

Власюк А. П. – доктор технічних наук, професор, декан факультету прикладної математики та КІС Національного університету водного господарства та природокористування (НУВГП),

Топішко І. І. – кандидат економічних наук, доцент, завідувач кафедри економічної теорії Національного університету “Острозька академія”.

П 19 Пасічник Я. А.

Математика для економістів: Підручник. – Острог: Видавництво Національного університету «Острозька академія», 2010. – 432 с.

ISBN 978-966-2254-16-2

Даний підручник вміщує теоретичний матеріал з основних розділів вищої математики, достатню кількість зразків розв'язування вправ, які ілюструють цей матеріал, завдання для самостійної роботи та відповіді до них.

Рекомендований як підручник студентам вищих навчальних закладів, які навчаються за освітньо-професійною програмою бакалавра галузі знань “Економіка і підприємництво”.

© Пасічник Я. А.
© Видавництво Національного університету «Острозька академія»

Передмова

Рівень кваліфікації майбутнього економіста значною мірою залежить від рівня його математичної підготовки. Оволодіти знаннями багатогалузевої математичної науки - нелегка справа. Тим більше, коли на вивчення курсу математики у вищому навчальному закладі відводиться порівняно невеликий обсяг годин. Пропонована книга має на меті допомогти студентам економічних спеціальностей з найменшими затратами часу оволодіти знанням найважливіших теоретичних положень з курсу вищої математики та відповідними практичними вміннями, необхідними майбутньому спеціалісту.

Підручник написаний відповідно до програми, розробленої спеціально для економічного факультету, і на основі лекцій, які протягом багатьох років читались мною в Острозькій Академії. Виклад матеріалу кожної теми здійснено з дотриманням плану і дидактичних принципів послідовності, системності, наочності і доступності, так щоб кожний студент, який усвідомлює необхідність математичних знань для майбутньої професійної діяльності і бажає серйозно вивчати і міцно засвоїти передбачений програмою мінімум питань курсу математики, зміг без особливих труднощів і з задоволенням опанувати його.

Підручник складається з трьох частин, які охоплюють основні розділи математики, знання яких на сучасному етапі широко використовуються у науковій та виробничій діяльності людини, зокрема в економічній теорії та практиці при аналізі економічних систем, економічному плануванні тощо. У зв'язку з цим, де це можливо, розкривається економічний зміст математичних понять

Перша частина містить 16 тем лекцій, в яких обгрунтовано значення математики для розвитку інших наук, її місце в діяльності людини, описаний різноманітний математичний інструментарій економіста. Але найбільше місця в цій частині займають питання лінійної алгебри — системи лінійних рівнянь та нерівностей, алгебраїчні та геометричні способи їх розв'язування, матрична алгебра й теорія визначників, основна задача лінійного програмування, арифметичний n -мірний векторний простір та квадратичні форми. Крім цього, значну увагу приділено питанням аналітичної геометрії — різним рівнянням прямої і площини, їх дослідженню, кривим другого порядку та ін.

Друга частина складається з 10 тем лекцій, які розкривають основи теорії множин і математичної логіки, дійсних чисел. Значну увагу приділено функціям, їх властивостям та графікам. Але найважливіше місце в цій частині займають окремі розділи математичного аналізу - теорія послідовностей і границь, основи диференціального числення функції однієї змінної, його застосування.

Третя частина, яка є продовженням теорії математичного аналізу і складається з 9 тем лекцій, вичерпує основи диференціального числення функцій кількох змінних, основи інтегрального числення - невизначений та визначений інтеграли, методи інтегрування, основи теорії диференціальних рівнянь і їх систем та теорію числових і степеневих рядів.

Всі положення кожного питання лекції розкриваються з необхідним обгрунтуванням і ілюструються розв'язанням вправ, які вимагають відповідних відомостей теорії і можуть служити студентам як зразки для самостійного розв'язування ними вправ. У підручнику вміщено до кожної теми завдання для самостійної роботи та відповіді до них.

Сподіваюсь, що даний підручник полегшить студентам-економістам процес оволодіння основами знань вищої математики.

Висловлюю глибоку вдячність всім, хто сприяв і допомагав у випуску цього підручника.

Автор

ЗМІСТ

Передмова	3
-----------------	---

Частина перша

Лінійна алгебра з елементами аналітичної геометрії

Тема 1. Місце математики в діяльності людини	5
1. Значення математики для розвитку інших наук	5
2. Математичний інструментарій економіста: масштаб, стовпцеві і секторні діаграми, проценти, рівняння, функції і ін	6
Тема 2. Системи двох лінійних рівнянь з двома змінними	15
1. Поняття рівняння з двома змінними	15
2. Лінійне рівняння. Рівносильні рівняння	15
3. Система двох лінійних рівнянь з двома змінними. Розв'язок системи	16
4. Алгебраїчні способи розв'язування системи двох лінійних рівнянь з двома змінними	16
5. Геометричний спосіб розв'язування системи двох лінійних рівнянь з двома змінними	18
Тема 3. Системи лінійних нерівностей з двома змінними	23
1. Геометричний спосіб розв'язування систем лінійних нерівностей	23
2. Основна задача лінійного програмування	26
Тема 4. Матрична алгебра	30
1. Поняття матриці. Прямокутна і квадратна матриці	30
2. Матриця-рядок. Матриця-стовпець. Одинична матриця	30
3. Особлива (вироджена) і неособлива (невироджена) матриці	31
4. Дії над матрицями, їх властивості. Транспонована матриця	32
5. Застосування матричної алгебри в економіці	36
Тема 5. Визначники	41
1. Поняття визначника квадратної матриці	41
2. Методи обчислення визначників другого і третього порядку	41
3. Властивості визначників	43
Тема 6. Обернена матриця. Алгоритм знаходження оберненої матриці	52
Тема 7. Ранг матриці.	58
Тема 8. Системи лінійних рівнянь	62
1. Однорідні та неоднорідні системи лінійних рівнянь	62
2. Система лінійних рівнянь в матричній формі	62
3. Узагальнення правила Крамера для розв'язування систем n лінійних рівнянь з n невідомими	67
4. Основна теорема про сумісність системи лінійних рівнянь. (Теорема Кронекера-Капеллі)	69
5. Знаходження розв'язків системи рівнянь методом Гаусса (Жордана-Гаусса)	72
6. Фундаментальна система розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь	77

Тема 9. Арифметичні n-мірні вектори. Векторні простори	83
1. Означення арифметичного n -мірного вектора	83
2. Дії над векторами, їх властивості	83
3. Арифметичний n -мірний векторний простір	84
4. Скалярний добуток векторів	85
5. Лінійна комбінація кількох векторів	85
6. Лінійно залежні і лінійно незалежні вектори. Приклади задач на лінійну залежність	86
7. Простіші властивості лінійної залежності	90
Тема 10. Базис і ранг системи векторів	93
1. Базис системи векторів, його властивості	93
2. Ранг системи векторів, його властивості	93
3. Узагальнення поняття базису. Розклад вектора за базисом	95
4. Ортогональна система векторів	95
5. Перехід від одного базису до іншого	96
Тема 11. Власні числа та власні вектори матриці	100
1. Поняття лінійного оператора	100
2. Власний вектор лінійного оператора. Власне число (значення) лінійного оператора	102
3. Методи знаходження власних значень і власних векторів	103
Тема 12. Квадратичні форми	105
1. Поняття квадратичної форми	105
2. Перетворення квадратичної форми до канонічного вигляду	108
3. Додатньо визначені форми. Умови Сільвестра	110
Тема 13. Елементи аналітичної геометрії. Векторна алгебра	112
1. Вступ	112
2. Вектори. Лінійні дії над векторами	112
3. Довжина вектора	114
4. Відстань між двома точками на прямій та на площині	115
5. Скалярний добуток векторів	116
6. Кут між векторами	116
7. Векторний добуток векторів	117
8. Мішаний добуток векторів	118
Тема 14. Пряма лінія на площині	122
1. Поняття рівняння лінії в R_2	122
2. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом	123
3. Рівняння прямої, яка проходить через одну точку; через дві точки	125
4. Рівняння прямої у відрізках	126
5. Загальне рівняння прямої і його дослідження	126
6. Умови паралельності та перпендикулярності прямих	127
7. Кут між двома прямими	128
8. Відстань від точки до прямої	129

Тема 15. Лінії другого порядку	136
1. Загальне рівняння ліній другого порядку. Коло	136
2. Знаходження центра та радіуса кола за загальним рівнянням	136
3. Канонічне рівняння еліпса	138
4. Гіпербола, її канонічне рівняння	140
5. Асимптоти гіперболи. Рівностороння (правильна) гіпербола	142
6. Парабола, її канонічне рівняння	142
Тема 16. Площина і пряма в просторі	148
1. Рівняння площини, яка проходить через дану точку перпендикулярно до даного вектора	148
2. Загальне рівняння площини і його дослідження	148
3. Рівняння площини у відрізках	149
4. Кут між площинами. Умови паралельності та перпендикулярності площин	150
5. Загальне та канонічне рівняння прямої в просторі	151
6. Поняття рівняння поверхні в просторі. Рівняння сфери.....	156

Частина друга

Елементи теорії множин, математичної логіки та математичного аналізу

Тема 1. Елементи теорії множин	161
1. Поняття множини, підмножини	161
2. Відношення між множинами, їх властивості	162
3. Відображення. Потужність множини	163
4. Дії над множинами, їх властивості	164
Тема 2. Елементи математичної логіки	170
1. Поняття висловлення	170
2. Предикат, його область визначення і область істинності	171
3. Дії над висловленнями	171
4. Дії над предикатами	174
5. Узагальнення властивостей дій над висловленнями і предикатами	176
Тема 3. Множина дійсних чисел, її структура	178
1. Числові множини. Відомості про дійсні числа	178
2. Зображення дійсних чисел на числовій прямій	181
3. Проміжки. Окіл точки. Гранична (межова) точка	182
4. Неперервність множини дійсних чисел	184
5. Межі числових множин	184
6. Модуль дійсного числа	185
7. Наближене значення величини. Абсолютна і відносна похибки	187

Тема 4. Функції, їх властивості та графіки	189
1. Означення функції. Способи задання функцій	189
2. Лінійна функція, її властивості і графік	192
3. Обернена пропорційність, її властивості і графік	196
4. Дробово-лінійна функція	197
5. Квадратна функція	201
6. Степенева функція	203
7. Показникова функція	203
8. Логарифмічна функція	203
Тема 5. Теорія послідовностей та границь	205
1. Означення числової послідовності. Обмежені послідовності	205
2. Монотонні послідовності	206
3. Границя числової послідовності. Нескінченно малі та нескінченно великі послідовності.....	207
4. Основні теореми про границі числових послідовностей	210
5. Таблиця найважливіших границь числових послідовностей	211
Тема 6. Границя функції неперервного аргументу	215
1. Означення границі функції в точці	215
2. Основні теореми про границі функцій	216
3. Розкриття невизначеностей	218
4. Правило Лопітала	220
5. Особливі границі	222
6. Односторонні границі	223
Тема 7. Неперервність функції	231
1. Означення неперервної функції в точці	231
2. Операції над неперервними функціями	232
3. Неперервність складеної функції	232
4. Одностороння неперервність	233
5. Точки розриву функції	233
6. Властивості функцій, неперервних на відрізку	234
7. Обернена функція та її неперервність	236
Тема 8. Похідна функції	246
1. Задачі, які приводять до поняття похідної	246
2. Означення похідної	248
3. Правило знаходження похідної	248
4. Механічний, геометричний і фізичний зміст похідної	249
5. Економічний зміст похідної	250
6. Правила обчислення похідних. Таблиця похідних	251
7. Похідна складеної функції	254
8. Залежність між неперервністю і диференційованістю функції	255

Тема 9. Диференціал функції. Похідні і диференціали вищих порядків	261
1. Означення диференціала функції	261
2. Правила обчислення диференціалів	261
3. Диференціал складеної функції	264
4. Похідні і диференціали вищих порядків	265
5. Похідна оберненої функції	267
6. Похідна неявно заданої функції	267
Тема 10. Дослідження функції за допомогою похідної	271
1. Теореми про середнє значення для диференційованих функцій	271
2. Ознаки монотонності функції	273
3. Екстремум функції. Найбільше і найменше значення функції на множині	274
4. Напрямок опуклості графіка функції	277
5. Точки перегину графіка функції	277
6. Асимптоти	278
7. Загальна схема дослідження поведінки функції та побудова графіка	279

Частина третя

Диференціальне числення функцій кількох змінних, інтегральне числення, диференціальні рівняння та ряди

Тема 1. Диференціальне числення функцій кількох змінних	298
1. Означення функції кількох змінних, її границя і неперервність	298
2. Повний приріст функції кількох змінних	301
3. Частинні похідні функції кількох змінних	302
4. Диференційованість функції кількох змінних. Диференціал функції кількох змінних	303
5. Властивості диференційованих функцій	305
Тема 2. Частинні похідні вищих порядків функції кількох змінних	313
1. Частинні похідні вищих порядків функції кількох змінних	313
2. Екстремуми функції кількох змінних	314
3. Необхідні й достатні умови екстремуму	315
4. Найменше та найбільше значення функції кількох змінних	316
Тема 3. Інтегральне числення	321
1. Первісна, її властивості	321
2. Невизначений інтеграл, його властивості	323
3. Таблиця основних інтегралів	324
Тема 4. Методи інтегрування	325
1. Інтегрування методом розкладу підінтегральної функції на суму функцій	325
2. Інтегрування за допомогою підстановки. (Метод заміни змінної)	325
3. Метод інтегрування частинами	326
4. Інтегрування дробово-раціональних функцій	327

Тема 5. Інтегрування ірраціональних та тригонометричних функцій	337
1. Інтегрування деяких класів функцій, що містять ірраціональні вирази	337
2. Інтегрування деяких трансцендентних функцій за допомогою тригонометричних підстановок	340
Тема 6. Визначений інтеграл	348
1. Задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла	348
2. Означення визначеного інтеграла	349
3. Властивості визначеного інтеграла	350
4. Обчислення визначених інтегралів. Формула Ньютона-Лейбніца	352
5. Деякі методи інтегрування визначеного інтеграла: а) метод підстановки (заміни змінної); б) метод інтегрування частинами; в) наближене обчислення визначеного інтеграла	355
6. Застосування визначеного інтеграла	359
7. Визначений інтеграл зі змінною верхньою межею та його похідна	361
8. Економічний зміст визначеного інтеграла	362
Тема 7. Звичайні диференціальні рівняння	365
1. Означення звичайного диференціального рівняння. Розв'язок рівняння. Загальний та частинний розв'язки	365
2. Задача Коші	367
3. Рівняння першого порядку. Теорема Коші про існування і єдиність розв'язку	368
4. Рівняння з відокремлюваними змінними	370
5. Рівняння в повних диференціалах	374
6. Лінійні диференціальні рівняння	376
7. Лінійні диференціальні рівняння з постійними коефіцієнтами	380
8. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку	386
9. Рівняння другого порядку, які допускають пониження порядку	390
10. Система звичайних диференціальних рівнянь	392
Тема 8. Числові ряди. Дослідження їх збіжності	397
1. Числовий ряд, його члени. Сума числового ряду. Збіжність та розбіжність ряду. Залишок ряду	397
2. Основні властивості збіжних числових рядів. Необхідна ознака збіжності	400
3. Ознаки збіжності додатніх числових рядів: ознаки порівняння, радикальна ознака Коші, ознака Даламбера, інтегральна ознака Коші	401
4. Абсолютна і умовна збіжність рядів	403
Тема 9. Функціональні ряди. Степеневі ряди	410
1. Функціональні послідовності та ряди і їх збіжність	410
2. Функціональні властивості суми ряду	411
3. Означення степеневих рядів, його збіжність. Теорема Абеля	412
4. Основні властивості степеневих рядів	415
5. Аналітичні функції. Розклад функцій у степеневі ряди	416
6. Дії над степеневими рядами	419
Список літератури	424