

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ОСТРОЗЬКА АКАДЕМІЯ»

Я. А. Пасічник

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Підручник

Острог
Видавництво Національного університету «Острозька академія»
2021

*Рекомендовано до друку вченою радою
Національного університету «Острозька академія»
(протокол № 7 від 28 січня 2021 року)*

Рецензенти:

Власюк А. П., доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри економіко-математичного моделювання та інформаційних технологій Національного університету «Острозька академія»;

Пастернак Я. М., доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри прикладної математики та механіки Луцького національного технічного університету;

Тадєєв П. О., доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики Національного університету водного господарства та природокористування.

Пасічник Я. А.

п 18 Вища математика : підручник. Острог : Видавництво Національного університету «Острозька академія», 2021. 432 с.

ISBN 978-617-8041-03-8

DOI 10.25264/978-617-8041-03-8

Підручник вміщує теоретичний матеріал з основних розділів вищої математики, достатню кількість зразків розв'язування вправ, які ілюструють цей матеріал, завдання для самостійної роботи та відповіді до них.

Рекомендований як підручник студентам вищих навчальних закладів, які здобувають вищу освіту бакалаврського рівня за освітньо-професійними програмами «Економічна кібернетика», «Облік і оподаткування», «Фінанси, банківська справа та страхування», «Комп'ютерні науки», а також за іншими освітніми програмами класичних і технічних університетів, де вища математика є фундаментальною дисципліною.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1

Передмова

Рівень кваліфікації сучасного економіста значною мірою залежить від рівня його математичної підготовки. Оволодіти знаннями багатогалузевої математичної науки – нелегка справа. Тим більше, коли на вивчення курсу математики у вищому навчальному закладі відводиться порівняно невеликий обсяг годин. Пропонована книга має на меті допомогти студентам з найменшими затратами часу оволодіти знанням найважливіших теоретичних положень з курсу вищої математики та відповідними практичними вміннями, необхідними майбутньому спеціалісту.

Підручник написаний відповідно до спеціально розробленої програми на основі лекцій, які протягом багатьох років читалися мною в університеті. Виклад матеріалу кожної теми здійснено з дотриманням плану і дидактичних принципів послідовності, системності, наочності і доступності, так щоб кожний студент, який усвідомлює необхідність математичних знань для майбутньої професійної діяльності і бажає серйозно вивчати і міцно засвоїти передбачений програмою мінімум питань курсу математики, зміг без особливих труднощів і з задоволенням опанувати його.

Підручник складається з трьох частин, які охоплюють основні розділи математики, знання яких на сучасному етапі широко використовуються у науковій та виробничій діяльності людини, зокрема в економічній теорії та практиці при аналізі економічних систем, економічному плануванні тощо. У зв'язку з цим, де це можливо, розкривається економічний зміст математичних понять.

Перша частина містить 16 тем лекцій, в яких обґрунтовано значення математики для розвитку інших наук, її місце в діяльності людини, описаний різноманітний математичний інструментарій економіста. Але найбільше місця в цій частині займають питання лінійної алгебри – системи лінійних рівнянь та нерівностей, алгебраїчні та геометричні способи їх розв'язування, матрична алгебра й теорія визначників, основна задача лінійного програмування, арифметичний n -мірний векторний простір та квадратичні форми. Крім цього, значну увагу приділено питанням аналітичної геометрії – різним рівнянням прямої і площини, їх дослідженню, кривим другого порядку та ін.

Друга частина складається з 10 тем лекцій, які розкривають основи теорії множин і математичної логіки, дійсних чисел. Значну увагу приділено функціям, їх властивостям та графікам. Але найважливіше місце в цій частині займають окремі розділи математичного аналізу – теорія послідовностей і границь, основи диференціального числення функції однієї змінної, його застосування.

Третя частина, яка є продовженням теорії математичного аналізу і складається з 9 тем лекцій, вичерпує основи диференціального числення функцій кількох змінних, основи інтегрального числення – невизначений та визначений інтеграл, методи інтегрування, основи теорії диференціальних рівнянь і їх систем та теорію числових і степеневих рядів.

Всі положення кожного питання лекції розкриваються з необхідним обґрунтуванням і ілюструються розв'язанням вправ, які вимагають відповідних відомостей теорії і можуть служити студентам як зразки для самостійного розв'язування ними вправ. У підручнику вміщено до кожної теми завдання для самостійної роботи та відповіді до них.

Сподіваюсь, що пропонований нами підручник полегшить студентам процес оволодіння основами знань вищої математики.

Висловлюю глибоку вдячність всім, хто сприяв і допомагав у випуску цього підручника.

Автор

Частина перша

Лінійна алгебра з елементами аналітичної геометрії

- Тема 1. Місце математики в діяльності людини
- Тема 2. Лінійна алгебра. Системи двох лінійних рівнянь з двома змінними
- Тема 3. Системи лінійних нерівностей з двома змінними
- Тема 4. Матрична алгебра
- Тема 5. Визначники
- Тема 6. Оборнена матриця. Алгоритм знаходження оборненої матриці
- Тема 7. Ранг матриці
- Тема 8. Системи лінійних рівнянь
- Тема 9. Арифметичні n -мірні вектори. Векторні простори
- Тема 10. Базис і ранг системи векторів
- Тема 11. Власні числа та власні вектори матриці
- Тема 12. Квадратичні форми
- Тема 13. Елементи аналітичної геометрії. Векторна алгебра
- Тема 14. Пряма лінія на площині
- Тема 15. Лінії другого порядку
- Тема 16. Площина і пряма в просторі

Тема 1. Місце математики в діяльності людини

1. Значення математики для розвитку інших наук
2. Математичний інструментарій економіста: масштаб, стовпцеві і секторні діаграми, проценти, рівняння, функції і ін.

1. Значення математики для розвитку інших наук

Математика, яка є найдавнішою з усіх наук, разом з тим лишається завжди молодою, бурхливо розвивається, весь час розширює галузі свого пізнання, все ширше розвиває свої зв'язки не тільки з природничими науками, а й з найрізноманітнішими галузями людської діяльності.

Визначні досягнення в усіх сферах економічного і суспільного розвитку невіддільні від науково-технічного прогресу, що ґрунтується на всебічному застосуванні математики. Вона допомагає сьогодні розв'язувати такі кардинальні, народногосподарські проблеми, як інтенсифікація виробництва, підвищення продуктивності праці, виконання енергетичної програми, зміцнення економічної та оборонної могутності держави і ін.

Проникнення математичних методів у будь-яку галузь науки та практичної людської діяльності пояснюється, насамперед, зв'язком математики з об'єктивною реальністю, завдяки якому числа, геометричні фігури та інші математичні поняття можуть відображати і описувати найрізноманітніші явища навколишньої дійсності, передбачати закономірності їх перебігу.

Недаремно К. Гаусс назвав математику “царицею наук”. Чому цариця?. Тому що її висновки обов'язкові для представників будь-якої науки. Інші видатні люди минулого також підкреслювали могутність математичної науки.

Сократ: “Той, хто народився математиком, маючи комбінаторний розум, має добрі здібності до всіх інших знань”.

Кант: “... в кожній окремій природничій науці можна знайти власне науку остільки, оскільки в ній можна знайти математику”.

Леонардо да Вінчі: “Ніякої достовірності немає в науках там, де не можна застосувати жодної з математичних наук, і в тому, що не має зв'язку з математикою”.

Справді, кожна наука тільки тоді досягає досконалості, коли їй вдається користуватися математикою.

Тепер є очевидним той факт, що математика надійно і ефективно використовується і в таких галузях наук, які досить “віддалені від неї” — в медицині, лінгвістиці, біології, економіці, в суспільних науках — політології, історії, соціології, а також в галузях діяльності, які описуються цими науками: лабораторні медичні аналізи складу крові, фізіологічні процеси людського організму, функціонування нейронових сіток людського мозку, закономірності розвитку рослин, управління виробничими процесами; в суспільних науках - кількісний та якісний склад політичних партій держави, співвідношення між ними, підсумки виборчих кампаній, характеристика кількісного складу урядів, політичних орієнтацій, вагомість та важливість історичних подій, їх масштабність за кількістю їх учасників, розмірами територій, соціальний склад населення держави, міста, регіону, установи, закладу; територіальні співвідношення між державами, регіонами; співвідношення між економічними зонами, зайнятими певними корисними копалинами, лісовими багатствами, посівними культурами, характеристики напрямів розвитку народного господарства регіону, сільськогосподарських галузей і т.п.

ЗМІСТ

| | |
|-----------------|---|
| Передмова | 3 |
|-----------------|---|

Частина перша

Лінійна алгебра з елементами аналітичної геометрії

| | |
|---|-----------|
| Тема 1. Місце математики в діяльності людини | 5 |
| 1. Значення математики для розвитку інших наук | 5 |
| 2. Математичний інструментарій економіста: масштаб, стовпцеві і секторні діаграми, проценти, рівняння, функції і ін | 6 |
| Тема 2. Системи двох лінійних рівнянь з двома змінними | 15 |
| 1. Поняття рівняння з двома змінними | 15 |
| 2. Лінійне рівняння. Рівносильні рівняння | 15 |
| 3. Система двох лінійних рівнянь з двома змінними. Розв'язок системи | 16 |
| 4. Алгебраїчні способи розв'язування системи двох лінійних рівнянь з двома змінними | 16 |
| 5. Геометричний спосіб розв'язування системи двох лінійних рівнянь з двома змінними | 18 |
| Тема 3. Системи лінійних нерівностей з двома змінними | 23 |
| 1. Геометричний спосіб розв'язування систем лінійних нерівностей | 23 |
| 2. Основна задача лінійного програмування | 26 |
| Тема 4. Матрична алгебра | 30 |
| 1. Поняття матриці. Прямокутна і квадратна матриці | 30 |
| 2. Матриця-рядок. Матриця-стовпець. Одинична матриця | 30 |
| 3. Особлива (вироджена) і неособлива (невироджена) матриці | 31 |
| 4. Дії над матрицями, їх властивості. Транспонована матриця | 32 |
| 5. Застосування матричної алгебри в економіці | 36 |
| Тема 5. Визначники | 41 |
| 1. Поняття визначника квадратної матриці | 41 |
| 2. Методи обчислення визначників другого і третього порядку | 41 |
| 3. Властивості визначників | 43 |
| Тема 6. Обернена матриця. Алгоритм знаходження оберненої матриці | 52 |
| Тема 7. Ранг матриці. | 58 |
| Тема 8. Системи лінійних рівнянь | 62 |
| 1. Однорідні та неоднорідні системи лінійних рівнянь | 62 |
| 2. Система лінійних рівнянь в матричній формі | 62 |
| 3. Узагальнення правила Крамера для розв'язування систем n лінійних рівнянь з n невідомими | 67 |
| 4. Основна теорема про сумісність системи лінійних рівнянь. (Теорема Кронекера-Капеллі) | 69 |
| 5. Знаходження розв'язків системи рівнянь методом Гаусса (Жордана-Гаусса) | 72 |
| 6. Фундаментальна система розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь | 77 |

| | |
|--|-----|
| Тема 9. Арифметичні n-мірні вектори. Векторні простори | 83 |
| 1. Означення арифметичного n -мірного вектора | 83 |
| 2. Дії над векторами, їх властивості | 83 |
| 3. Арифметичний n -мірний векторний простір | 84 |
| 4. Скалярний добуток векторів | 85 |
| 5. Лінійна комбінація кількох векторів | 85 |
| 6. Лінійно залежні і лінійно незалежні вектори. Приклади задач на лінійну залежність | 86 |
| 7. Простіші властивості лінійної залежності | 90 |
| Тема 10. Базис і ранг системи векторів | 93 |
| 1. Базис системи векторів, його властивості | 93 |
| 2. Ранг системи векторів, його властивості | 93 |
| 3. Узагальнення поняття базису. Розклад вектора за базисом | 95 |
| 4. Ортогональна система векторів | 95 |
| 5. Перехід від одного базису до іншого | 96 |
| Тема 11. Власні числа та власні вектори матриці | 100 |
| 1. Поняття лінійного оператора | 100 |
| 2. Власний вектор лінійного оператора. Власне число (значення) лінійного оператора | 102 |
| 3. Методи знаходження власних значень і власних векторів | 103 |
| Тема 12. Квадратичні форми | 105 |
| 1. Поняття квадратичної форми | 105 |
| 2. Перетворення квадратичної форми до канонічного вигляду | 108 |
| 3. Додатньо визначені форми. Умови Сільвестра | 110 |
| Тема 13. Елементи аналітичної геометрії. Векторна алгебра | 112 |
| 1. Вступ | 112 |
| 2. Вектори. Лінійні дії над векторами | 112 |
| 3. Довжина вектора | 114 |
| 4. Відстань між двома точками на прямій та на площині | 115 |
| 5. Скалярний добуток векторів | 116 |
| 6. Кут між векторами | 116 |
| 7. Векторний добуток векторів | 117 |
| 8. Мішаний добуток векторів | 118 |
| Тема 14. Пряма лінія на площині | 122 |
| 1. Поняття рівняння лінії в R_2 | 122 |
| 2. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом | 123 |
| 3. Рівняння прямої, яка проходить через одну точку; через дві точки | 125 |
| 4. Рівняння прямої у відрізках | 126 |
| 5. Загальне рівняння прямої і його дослідження | 126 |
| 6. Умови паралельності та перпендикулярності прямих | 127 |
| 7. Кут між двома прямими | 128 |
| 8. Відстань від точки до прямої | 129 |

| | |
|---|-----|
| Тема 15. Лінії другого порядку | 136 |
| 1. Загальне рівняння ліній другого порядку. Коло | 136 |
| 2. Знаходження центра та радіуса кола за загальним рівнянням | 136 |
| 3. Канонічне рівняння еліпса | 138 |
| 4. Гіпербола, її канонічне рівняння | 140 |
| 5. Асимптоти гіперболи. Рівностороння (правильна) гіпербола | 142 |
| 6. Парабола, її канонічне рівняння | 142 |
| Тема 16. Площина і пряма в просторі | 148 |
| 1. Рівняння площини, яка проходить через дану точку перпендикулярно до даного вектора | 148 |
| 2. Загальне рівняння площини і його дослідження | 148 |
| 3. Рівняння площини у відрізках | 149 |
| 4. Кут між площинами. Умови паралельності та перпендикулярності площин | 150 |
| 5. Загальне та канонічне рівняння прямої в просторі | 151 |
| 6. Поняття рівняння поверхні в просторі. Рівняння сфери..... | 156 |

Частина друга

Елементи теорії множин, математичної логіки та математичного аналізу

| | |
|--|-----|
| Тема 1. Елементи теорії множин | 161 |
| 1. Поняття множини, підмножини | 161 |
| 2. Відношення між множинами, їх властивості | 162 |
| 3. Відображення. Потужність множини | 163 |
| 4. Дії над множинами, їх властивості | 164 |
| Тема 2. Елементи математичної логіки | 170 |
| 1. Поняття висловлення | 170 |
| 2. Предикат, його область визначення і область істинності | 171 |
| 3. Дії над висловленнями | 171 |
| 4. Дії над предикатами | 172 |
| 5. Узагальнення властивостей дій над висловленнями і предикатами | 176 |
| Тема 3. Множина дійсних чисел, її структура | 178 |
| 1. Числові множини. Відомості про дійсні числа | 178 |
| 2. Зображення дійсних чисел на числовій прямій | 181 |
| 3. Проміжки. Окіл точки. Гранична (межова) точка | 182 |
| 4. Неперервність множини дійсних чисел | 184 |
| 5. Межі числових множин | 153 |
| 6. Модуль дійсного числа | 164 |
| 7. Наближене значення величини. Абсолютна і відносна похибки | 187 |

| | |
|--|-----|
| Тема 4. Функції, їх властивості та графіки | 189 |
| 1. Означення функції. Способи задання функцій | 189 |
| 2. Лінійна функція, її властивості і графік | 192 |
| 3. Обернена пропорційність, її властивості і графік | 196 |
| 4. Дробово-лінійна функція | 197 |
| 5. Квадратна функція | 201 |
| 6. Степенева функція | 203 |
| 7. Показникова функція | 203 |
| 8. Логарифмічна функція | 203 |
| Тема 5. Теорія послідовностей та границь | 205 |
| 1. Означення числової послідовності. Обмежені послідовності | 205 |
| 2. Монотонні послідовності | 206 |
| 3. Границя числової послідовності. Нескінченно малі та нескінченно великі послідовності..... | 207 |
| 4. Основні теореми про границі числових послідовностей | 210 |
| 5. Таблиця найважливіших границь числових послідовностей | 211 |
| Тема 6. Границя функції неперервного аргументу | 215 |
| 1. Означення границі функції в точці | 215 |
| 2. Основні теореми про границі функцій | 216 |
| 3. Розкриття невизначеностей | 218 |
| 4. Правило Лопітала | 220 |
| 5. Особливі границі | 222 |
| 6. Односторонні границі | 223 |
| Тема 7. Неперервність функції | 231 |
| 1. Означення неперервної функції в точці | 231 |
| 2. Операції над неперервними функціями | 232 |
| 3. Неперервність складеної функції | 232 |
| 4. Одностороння неперервність | 233 |
| 5. Точки розриву функції | 233 |
| 6. Властивості функцій, неперервних на відрізку | 234 |
| 7. Обернена функція та її неперервність | 236 |
| Тема 8. Похідна функції | 246 |
| 1. Задачі, які приводять до поняття похідної | 246 |
| 2. Означення похідної | 248 |
| 3. Правило знаходження похідної | 248 |
| 4. Механічний, геометричний і фізичний зміст похідної | 249 |
| 5. Економічний зміст похідної | 250 |
| 6. Правила обчислення похідних. Таблиця похідних | 251 |
| 7. Похідна складеної функції | 254 |
| 8. Залежність між неперервністю і диференційованістю функції | 255 |

| | |
|---|------------|
| Тема 9. Диференціал функції. Похідні і диференціали вищих порядків | 261 |
| 1. Означення диференціала функції | 261 |
| 2. Правила обчислення диференціалів | 261 |
| 3. Диференціал складеної функції | 264 |
| 4. Похідні і диференціали вищих порядків | 265 |
| 5. Похідна оберненої функції | 267 |
| 6. Похідна неявно заданої функції | 267 |
| Тема 10. Дослідження функції за допомогою похідної | 271 |
| 1. Теореми про середнє значення для диференційованих функцій | 271 |
| 2. Ознаки монотонності функції | 273 |
| 3. Екстремум функції. Найбільше і найменше значення функції на множині | 274 |
| 4. Напрямок опуклості графіка функції | 277 |
| 5. Точки перегину графіка функції | 277 |
| 6. Асимптоти | 278 |
| 7. Загальна схема дослідження поведінки функції та побудова графіка | 279 |

Частина третя

Диференціальне числення функцій кількох змінних, інтегральне числення, диференціальні рівняння та ряди

| | |
|--|------------|
| Тема 1. Диференціальне числення функцій кількох змінних | 298 |
| 1. Означення функції кількох змінних, її границя і неперервність | 298 |
| 2. Повний приріст функції кількох змінних | 301 |
| 3. Частинні похідні функції кількох змінних | 302 |
| 4. Диференційованість функції кількох змінних. Диференціал функції кількох змінних | 303 |
| 5. Властивості диференційованих функцій | 305 |
| Тема 2. Частинні похідні вищих порядків функції кількох змінних | 313 |
| 1. Частинні похідні вищих порядків функції кількох змінних | 313 |
| 2. Екстремуми функції кількох змінних | 314 |
| 3. Необхідні й достатні умови екстремуму | 315 |
| 4. Найменше та найбільше значення функції кількох змінних | 316 |
| Тема 3. Інтегральне числення | 321 |
| 1. Первісна, її властивості | 321 |
| 2. Невизначений інтеграл, його властивості | 323 |
| 3. Таблиця основних інтегралів | 324 |
| Тема 4. Методи інтегрування | 325 |
| 1. Інтегрування методом розкладу підінтегральної функції на суму функцій | 325 |
| 2. Інтегрування за допомогою підстановки. (Метод заміни змінної) | 325 |
| 3. Метод інтегрування частинами | 326 |
| 4. Інтегрування дробово-раціональних функцій | 327 |

| | |
|---|------------|
| Тема 5. Інтегрування ірраціональних та тригонометричних функцій | 337 |
| 1. Інтегрування деяких класів функцій, що містять ірраціональні вирази | 337 |
| 2. Інтегрування деяких трансцендентних функцій за допомогою тригонометричних підстановок | 340 |
| Тема 6. Визначений інтеграл | 348 |
| 1. Задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла | 348 |
| 2. Означення визначеного інтеграла | 349 |
| 3. Властивості визначеного інтеграла | 350 |
| 4. Обчислення визначених інтегралів. Формула Ньютона-Лейбніца | 352 |
| 5. Деякі методи інтегрування визначеного інтеграла: а) метод підстановки (заміни змінної); б) метод інтегрування частинами; в) наближене обчислення визначеного інтеграла | 355 |
| 6. Застосування визначеного інтеграла | 359 |
| 7. Визначений інтеграл зі змінною верхньою межею та його похідна | 361 |
| 8. Економічний зміст визначеного інтеграла | 362 |
| Тема 7. Звичайні диференціальні рівняння | 365 |
| 1. Означення звичайного диференціального рівняння. Розв'язок рівняння. Загальний та частинний розв'язки | 365 |
| 2. Задача Коші | 367 |
| 3. Рівняння першого порядку. Теорема Коші про існування і єдиність розв'язку | 368 |
| 4. Рівняння з відокремлюваними змінними | 370 |
| 5. Рівняння в повних диференціалах | 374 |
| 6. Лінійні диференціальні рівняння | 376 |
| 7. Лінійні диференціальні рівняння з постійними коефіцієнтами | 380 |
| 8. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку | 386 |
| 9. Рівняння другого порядку, які допускають пониження порядку | 390 |
| 10. Система звичайних диференціальних рівнянь | 392 |
| Тема 8. Числові ряди. Дослідження їх збіжності | 397 |
| 1. Числовий ряд, його члени. Сума числового ряду. Збіжність та розбіжність ряду. Залишок ряду | 397 |
| 2. Основні властивості збіжних числових рядів. Необхідна ознака збіжності | 400 |
| 3. Ознаки збіжності додатніх числових рядів: ознаки порівняння, радикальна ознака Коші, ознака Даламбера, інтегральна ознака Коші | 401 |
| 4. Абсолютна і умовна збіжність рядів | 403 |
| Тема 9. Функціональні ряди. Степеневі ряди | 410 |
| 1. Функціональні послідовності та ряди і їх збіжність | 410 |
| 2. Функціональні властивості суми ряду | 411 |
| 3. Означення степеневого ряду, його збіжність. Теорема Абеля | 412 |
| 4. Основні властивості степеневих рядів | 415 |
| 5. Аналітичні функції. Розклад функцій у степеневі ряди | 416 |
| 6. Дії над степеневими рядами | 419 |
| Список літератури | 424 |

Навчальне видання

Ядвіга Августівна ПАСІЧНИК

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Підручник

Комп'ютерний набір Шостак О. М.
Технічний редактор Крушинська Н. О.

Формат 60x84/8. Ум. друк. арк. 50,22. Наклад 100 пр. Зам. № 58–21.
Папір офсетний. Друк цифровий. Гарнітура «Times New Roman».

Оригінал-макет виготовлено у видавництві
Національного університету «Острозька академія»,
Україна, 35800, Рівненська обл., м. Острог, вул. Семінарська, 2.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи РВ № 1 від 8 серпня 2000 року.

Виготовлено ФОП Свиначук М. В.
Тел. (+38068) 68 35 800, e-mail: 35800@ukr.net.